



Université
de Paris



Topologie et physique quantique mésoscopique

Christophe Mora,

Laboratoire Matériaux et Phénomènes Quantiques

Université de Paris

The Nobel Prize in Physics 2016



Photo: A. Mahmoud
David J. Thouless
Prize share: 1/2



Photo: A. Mahmoud
F. Duncan M.
Haldane
Prize share: 1/4



Photo: A. Mahmoud
J. Michael Kosterlitz
Prize share: 1/4

“for theoretical discoveries of topological phase transitions and topological phases of matter”

- Concepts récents
- Développements importants dans la dernière décennie

They revealed the secrets of exotic matter

" This year's Laureates opened the door on an unknown world where matter can assume strange states. They have used **advanced mathematical methods** to study unusual phases, or states, of matter, such as superconductors, superfluids or thin magnetic films.

Thanks to their pioneering work, the hunt is now on for new and exotic phases of matter. [...]. Over the last decade, this area has boosted frontline research in condensed matter physics, not least because of the hope that topological materials could be used in **new generations of electronics and superconductors, or in future quantum computers**. Current research is revealing the secrets of matter in the exotic worlds discovered by this year's Nobel Laureates."

Plan de la présentation

I. Topologie et mathématique

II. Ondes et phase géométrique

III. Solides isolants et topologiques

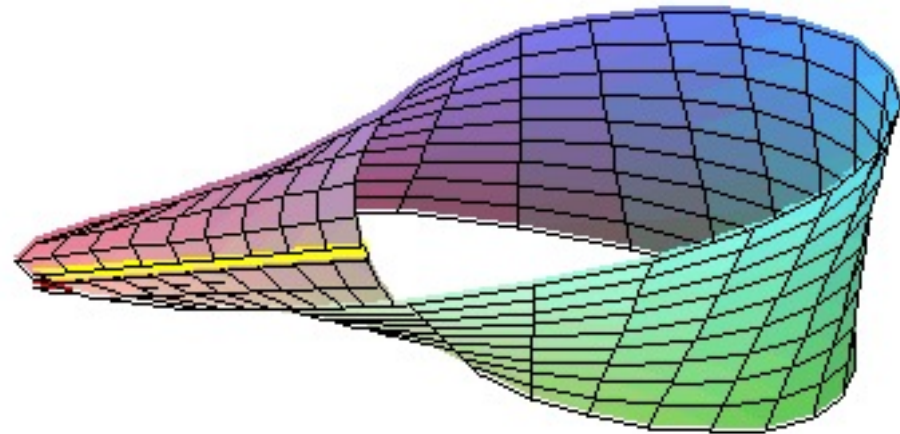
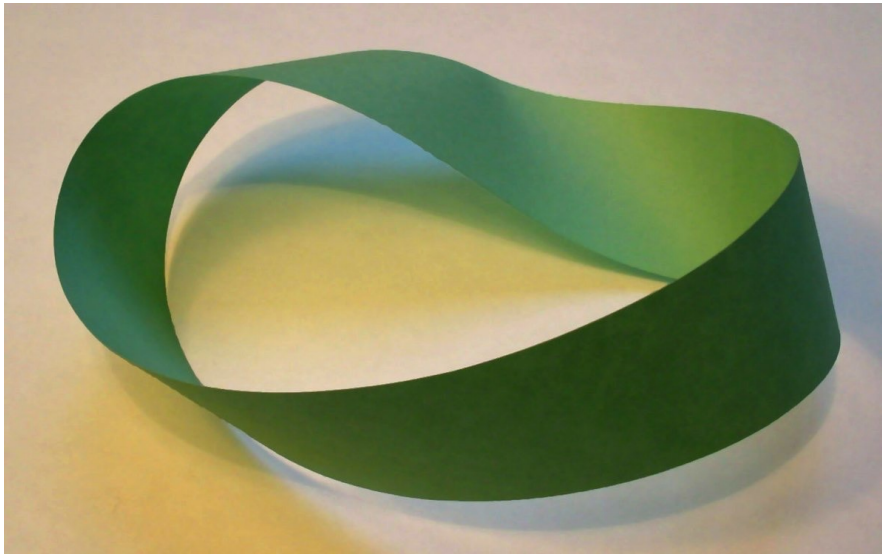
IV. Effet Hall quantique

Topologie et mathématique

Topologie, un domaine des mathématiques

Etude des déformations continues d'objets

Classification des surfaces

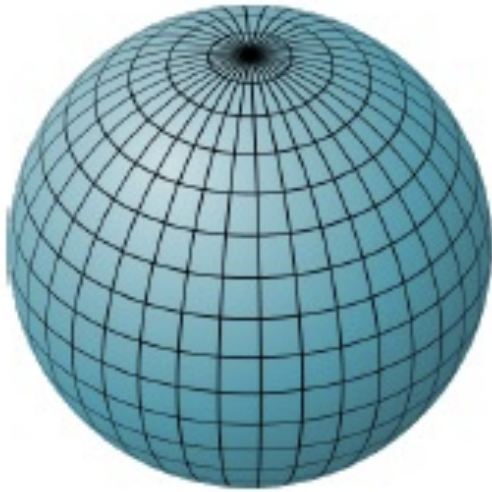


Ruban de Möbius

Différent d'un ruban enroulé sans torsion

Topologie, un domaine des mathématiques

Invariants topologiques, classifications



$$g = 0$$

Théorème de Gauss-Bonnet

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K dS = 2(1 - g)$$

K est la courbure en un point de la sphère

Lien entre une propriété locale, K , et un indice entier global g

$$K = 1/R^2 \text{ pour une sphère}$$

Invariant topologique

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K dS = 2(1 - g)$$



$g = 1$



$g = 2$



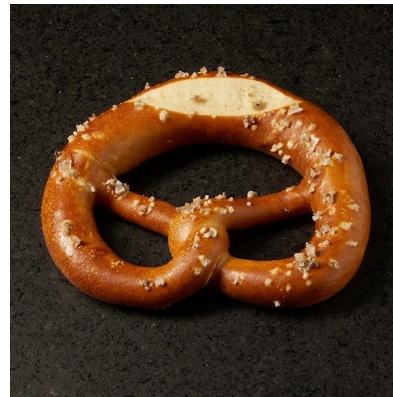
$g = 1$



$g = 0$

Boulangerie topologique

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K dS = 2(1 - g)$$



Ondes et phase géométrique

Dualité onde-corpuscule

Louis de Broglie (Nobel 1929)

Longueur d'onde

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Constante de Planck

Impulsion



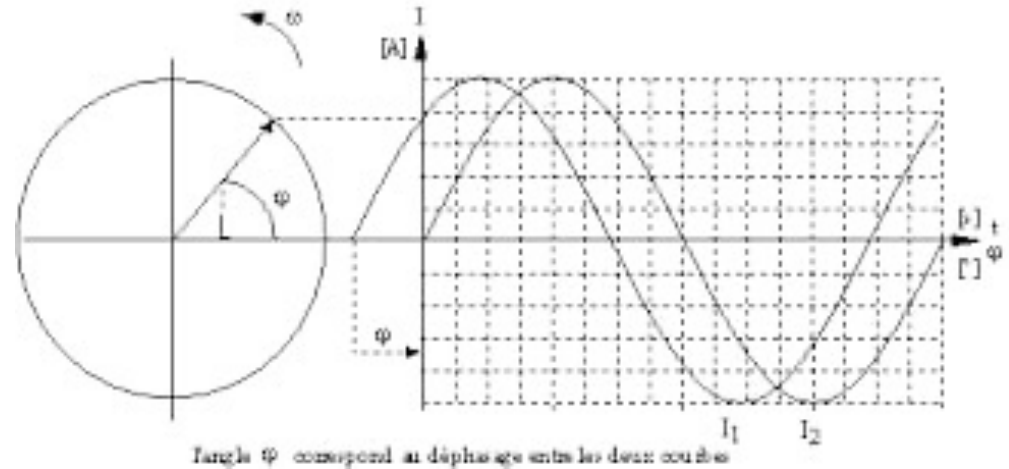
La lumière est **à la fois** une onde électromagnétique et une addition de photons

Les particules présentent aussi cette dualité

Décrites par une fonction d'onde (Schrödinger)

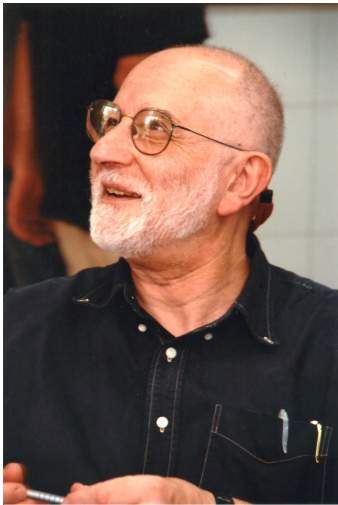
Phase d'une onde

Déphasage entre deux ondes sinusoidales est caractérisé par un angle

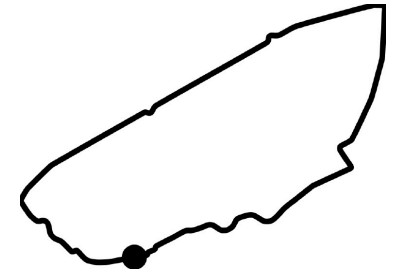


Phases géométriques ou phases de Berry

Espace des paramètres



$$\varphi = \omega t + \varphi_{\text{geo}}$$



Phase géométrique dépend du chemin suivi

Pancharatnam (1956)

Berry (1984) en mécanique quantique

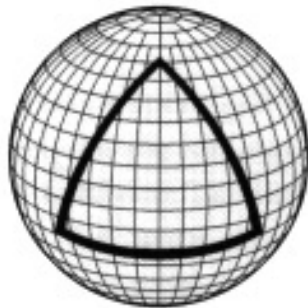
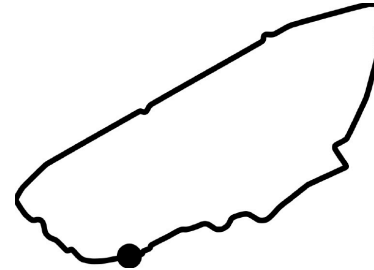
Phase géométrique

Phase géométrique nécessite

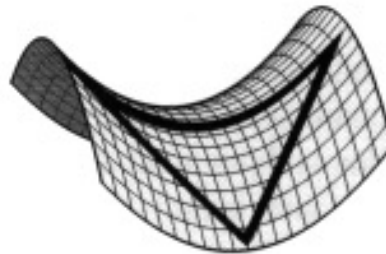
1) un chemin fermé

2) un espace **non-euclidien**, c'est-à-dire un espace avec une **courbure**

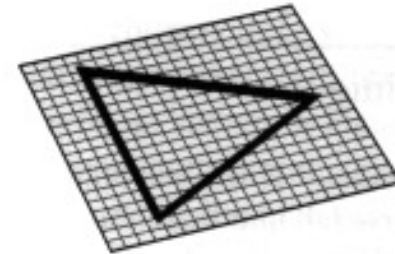
→ φ_{geo}



Positive Curvature



Negative Curvature



Flat Curvature

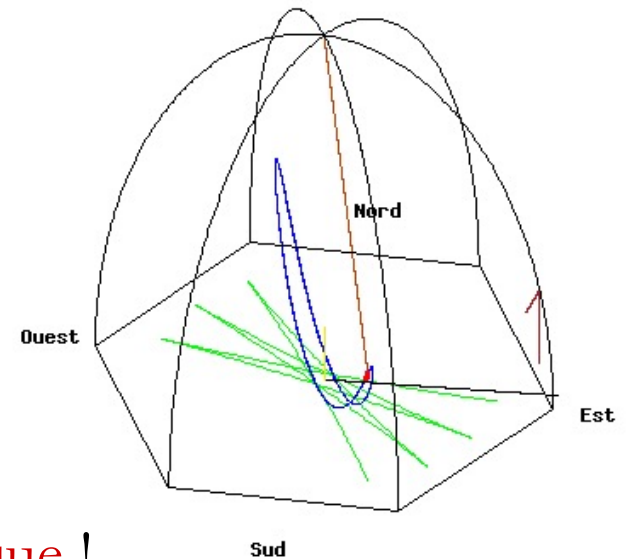
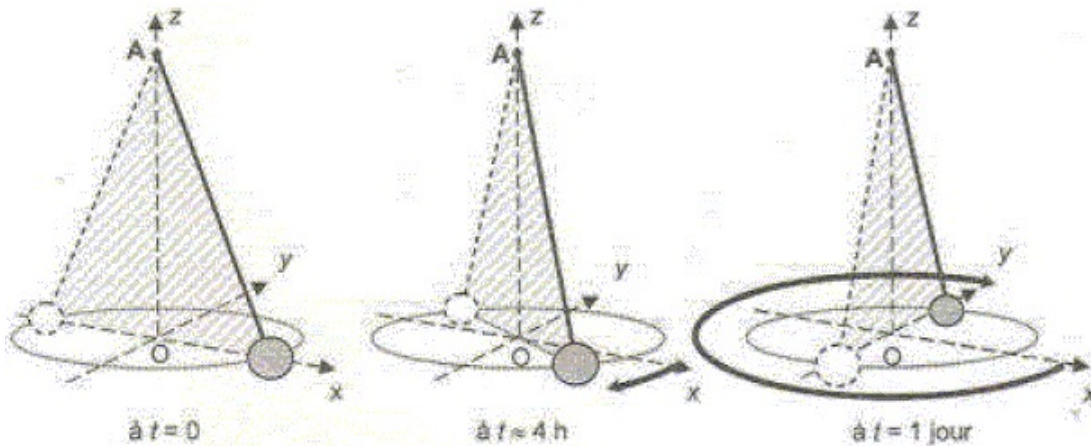
Pendule de Foucault

Le plan d'oscillation d'un pendule tourne lentement au cours du temps (tour complet en 32h à Paris)



$$\omega = 360^\circ \sin \lambda / \text{jour}$$

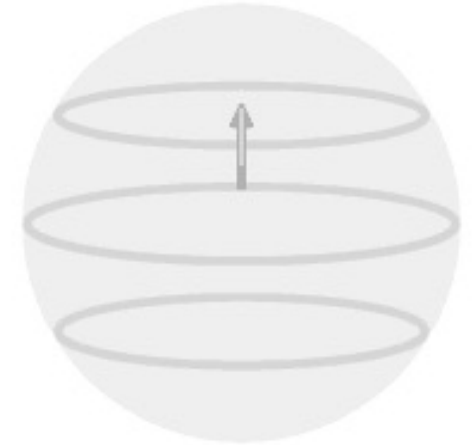
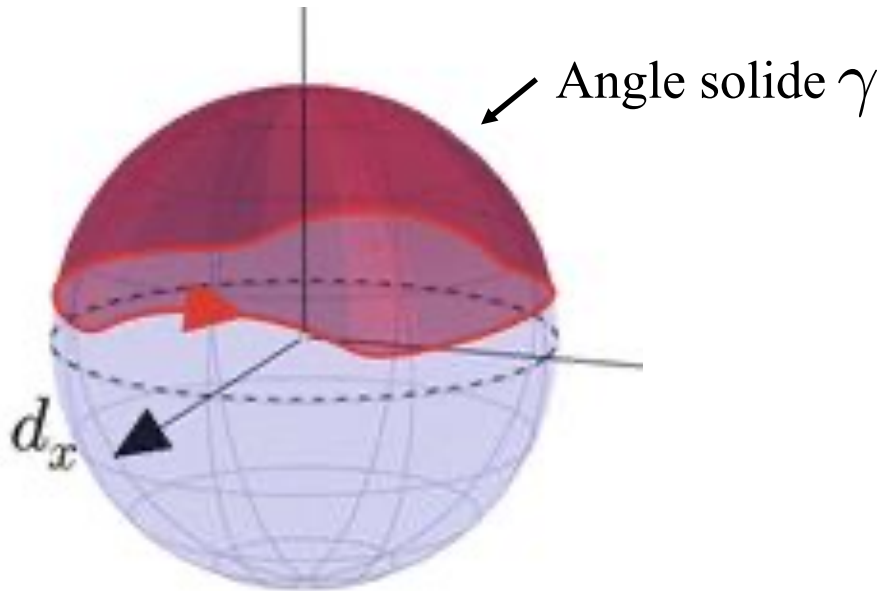
Latitude λ



Angle de rotation est une **phase géométrique** !

Pendule de Foucault et phase de Berry

Angle de rotation est une **phase géométrique** !



La phase est donnée par l'**aire** de la surface dont le chemin fermé est la **frontière**

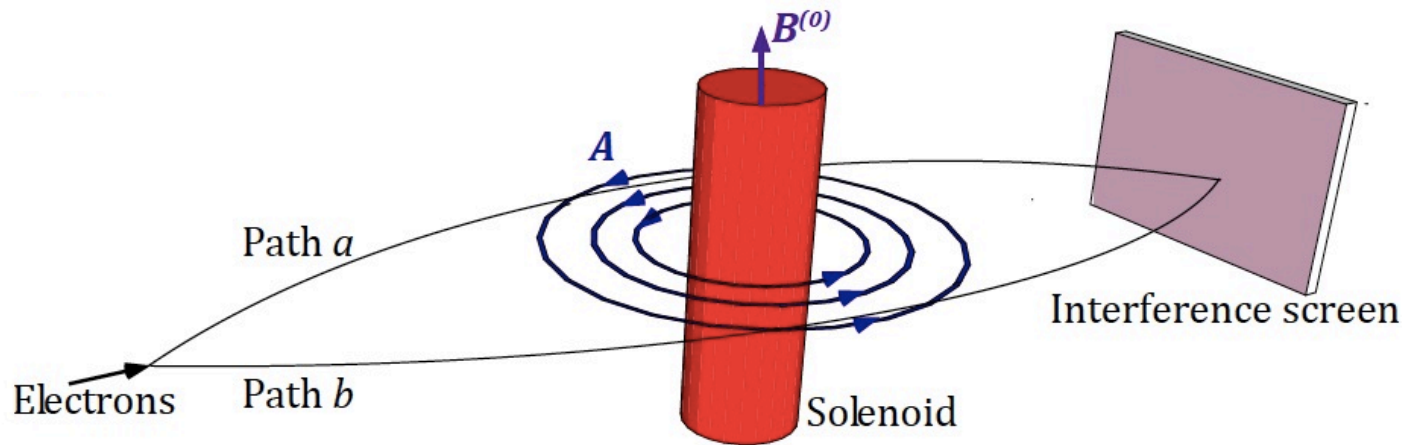
Résultat pour une latitude fixe λ

Angle de rotation
sur un jour

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= \gamma - 2\pi \\ &= -2\pi \sin \lambda\end{aligned}$$

Autre exemple : la phase d'Aharonov-Bohm

Interférence entre deux chemins pour des électrons



$$I = I_1 + I_2 + I_{\text{int}} \cos \delta\varphi$$

$\delta\varphi = \frac{qBS}{\hbar}$ est la **phase de Berry** d'un chemin fermé

Le champ magnétique incurve les **trajectoires** des électrons

Cela donne : courbure + phase géométrique (Berry)

Résumé : la phase géométrique

La phase géométrique ou phase de Berry

1) Pendule de Foucault

Caractérise un angle : l'orientation du plan d'oscillation

La courbure est celle de la Terre

2) Effet Aharonov Bohm

La phase est celle de l'onde électronique

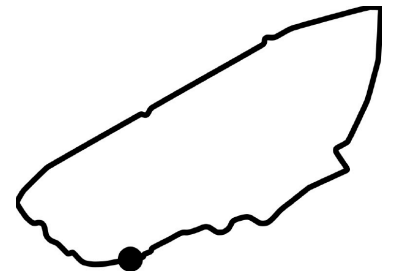
La courbure est donnée par le champ magnétique

3) Fonction d'onde en mécanique quantique

La phase est celle de la fonction d'onde électronique

La courbure est donnée par la variation de la fonction d'onde avec les paramètres du modèle

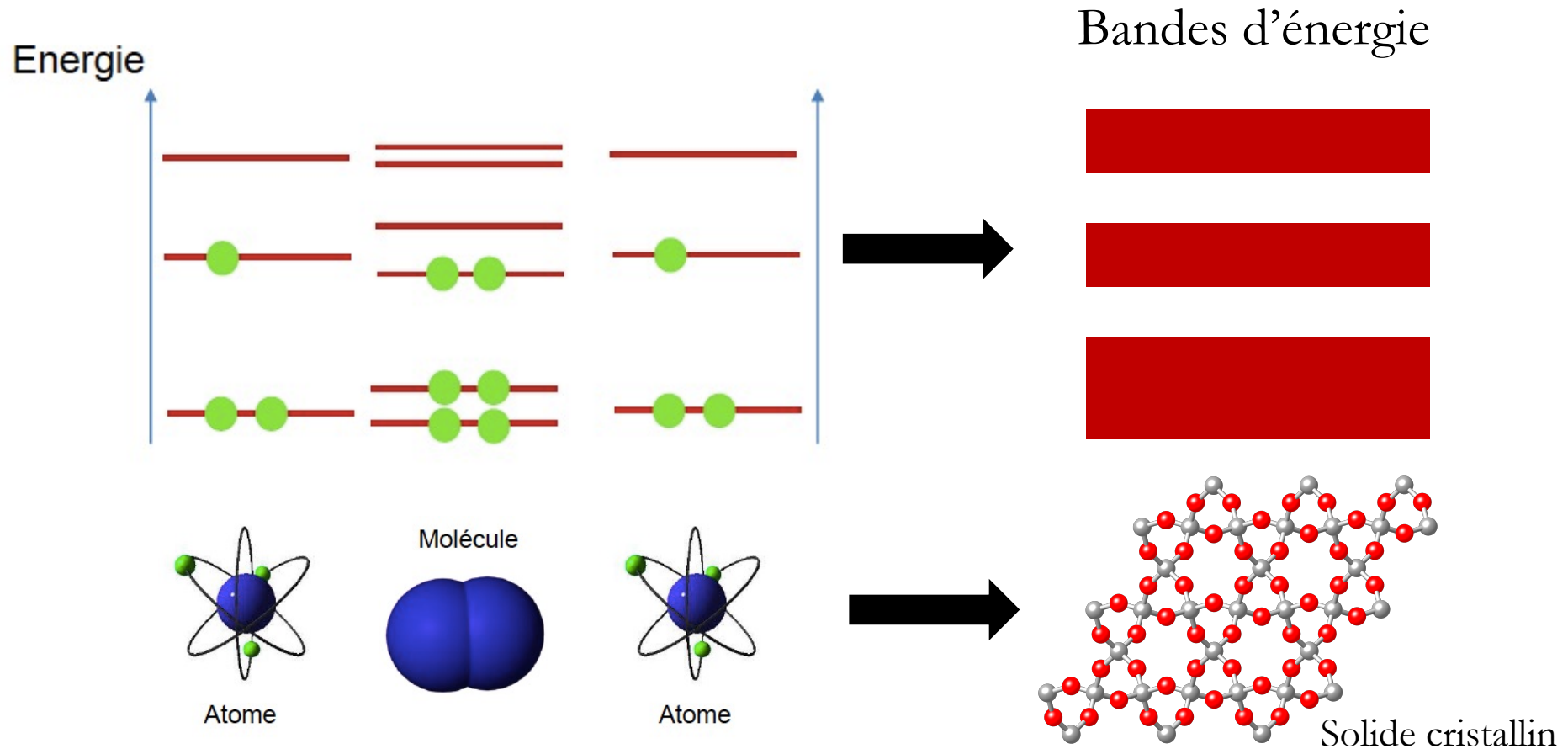
Espace des paramètres



Solides isolants et topologiques

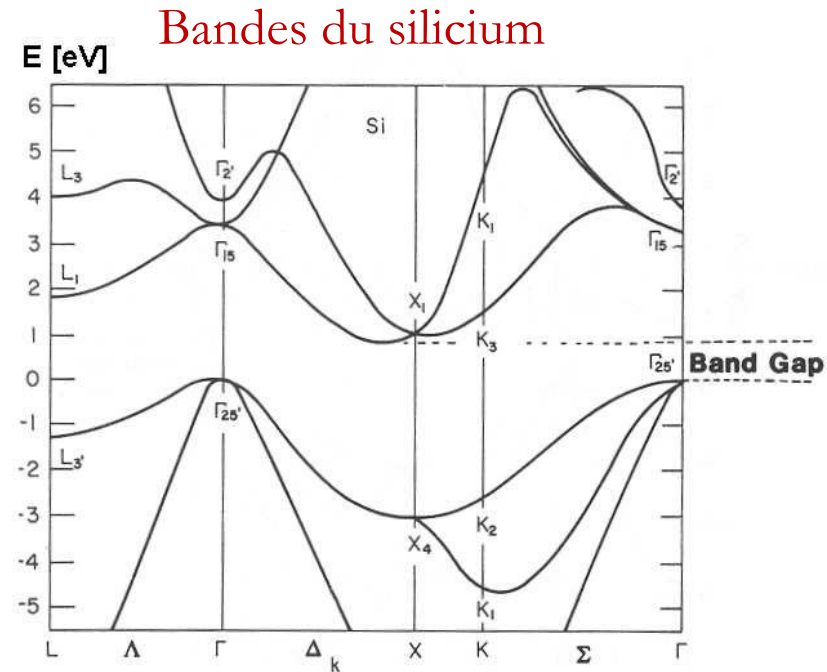
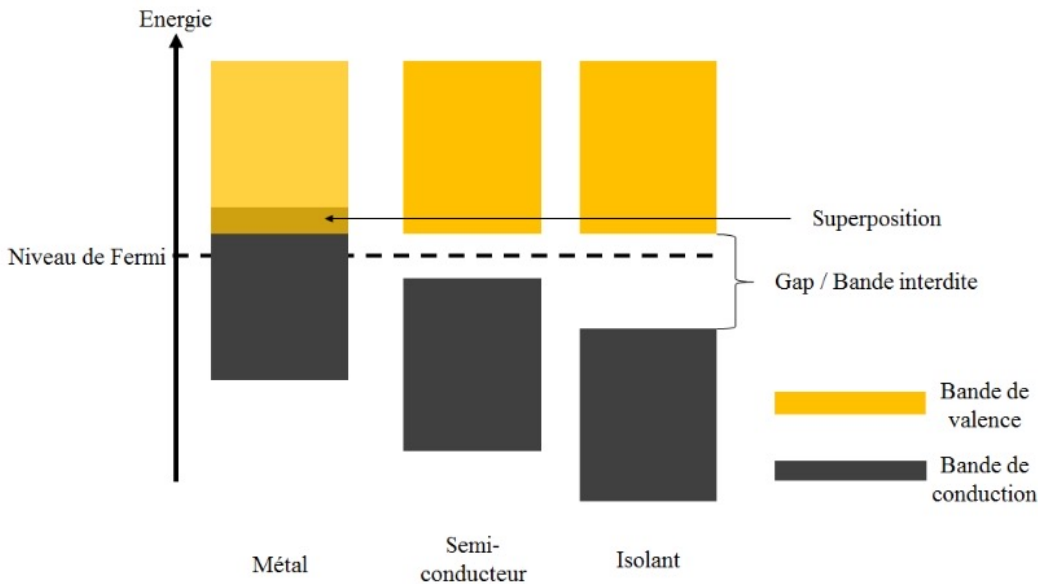
Comment décrire les électrons d'un solide ?

Des ondes électroniques naissent dans les solides cristallins

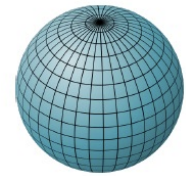


Bandes d'énergie dans les solides

Principe de Pauli : un seul électron par état quantique



Ondes électroniques dans un potentiel périodique : vecteurs d'onde périodiques (sur une sphère à 2 dimensions)

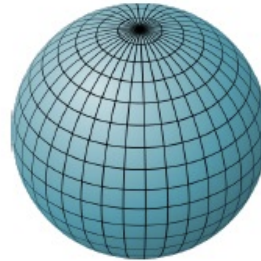


Isolants : courbure et nombre de Chern

Rappel : théorème de Gauss-Bonnet

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K dS = 2(1 - g)$$

K est la courbure

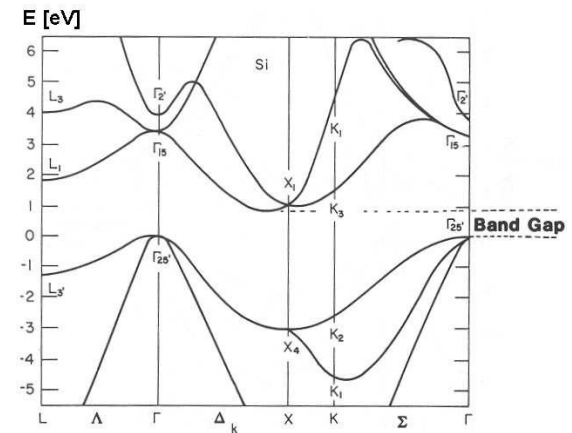


Electrons dans un solide cristallin

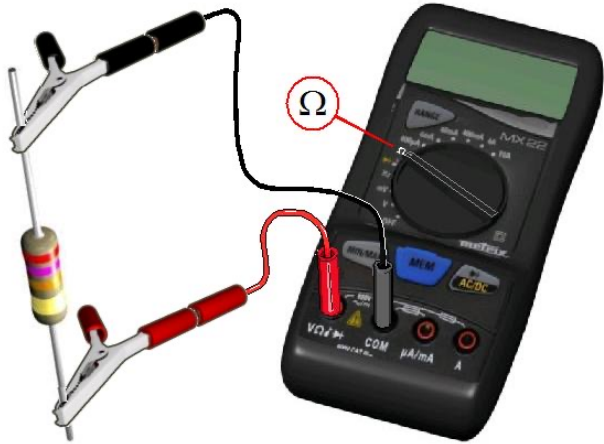
- 1) vecteurs d'onde sur une sphère
- 2) courbure \mathcal{F} lorsqu'on varie le vecteur d'onde (phase de Berry)

Résultat analogue à Gauss-Bonnet

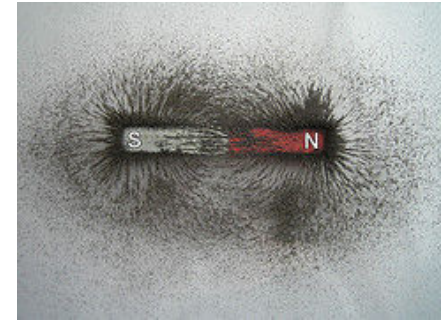
$$\frac{1}{2\pi} \int_S \mathcal{F} dS = n \in \mathbb{Z} \quad \text{Nombre de Chern (entier), topologique}$$



Mesures physiques



Résistance



Aimantation

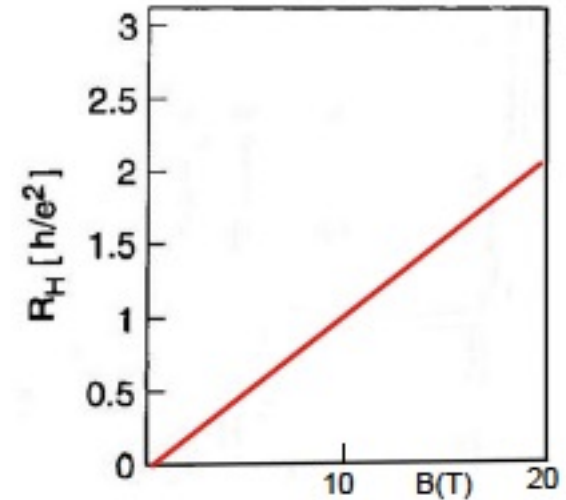
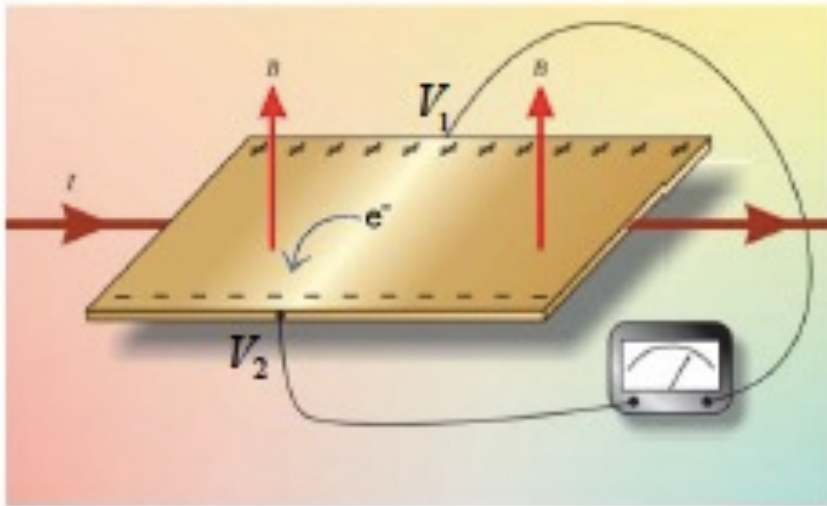
Mesures reproductibles ?

- Mesure d'une quantité physique varie d'un jour à l'autre (dans le temps)
- Mesure varie entre deux échantillons

Mesurons des entiers ?

Effet Hall quantique

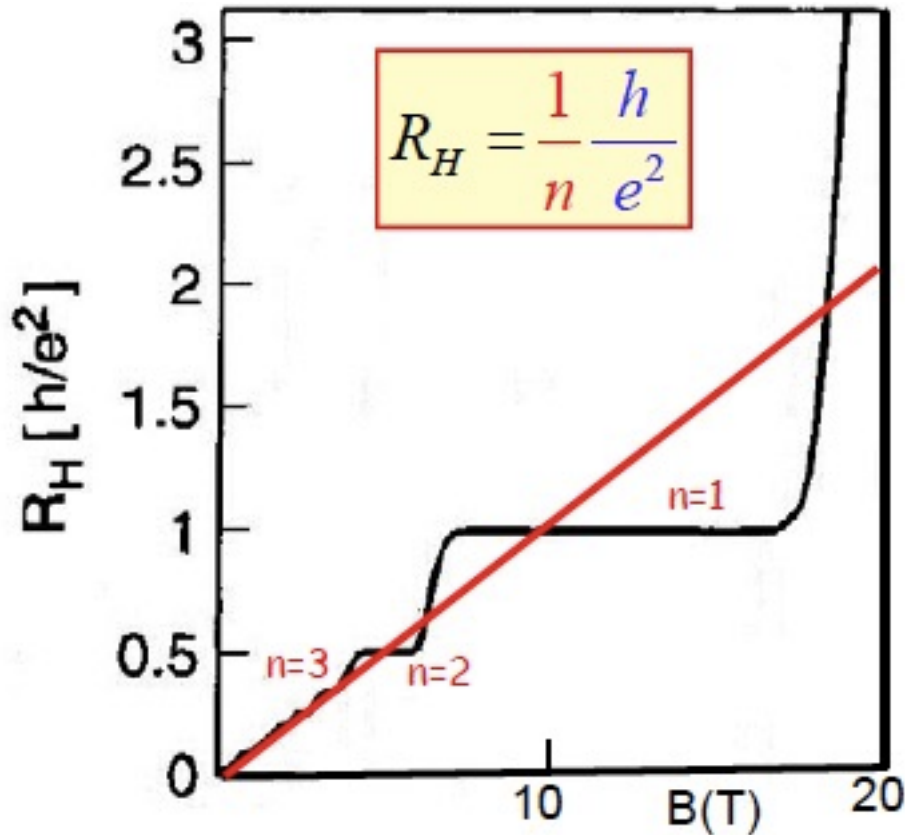
Effet Hall classique (1878)



$$R_H = \frac{V_1 - V_2}{I} \sim B$$

Le champ magnétique incurve les **trajectoires** des électrons

Effet Hall quantique (1980)



$$R_H = \frac{1}{n} \left(\frac{h}{e^2} \right)$$

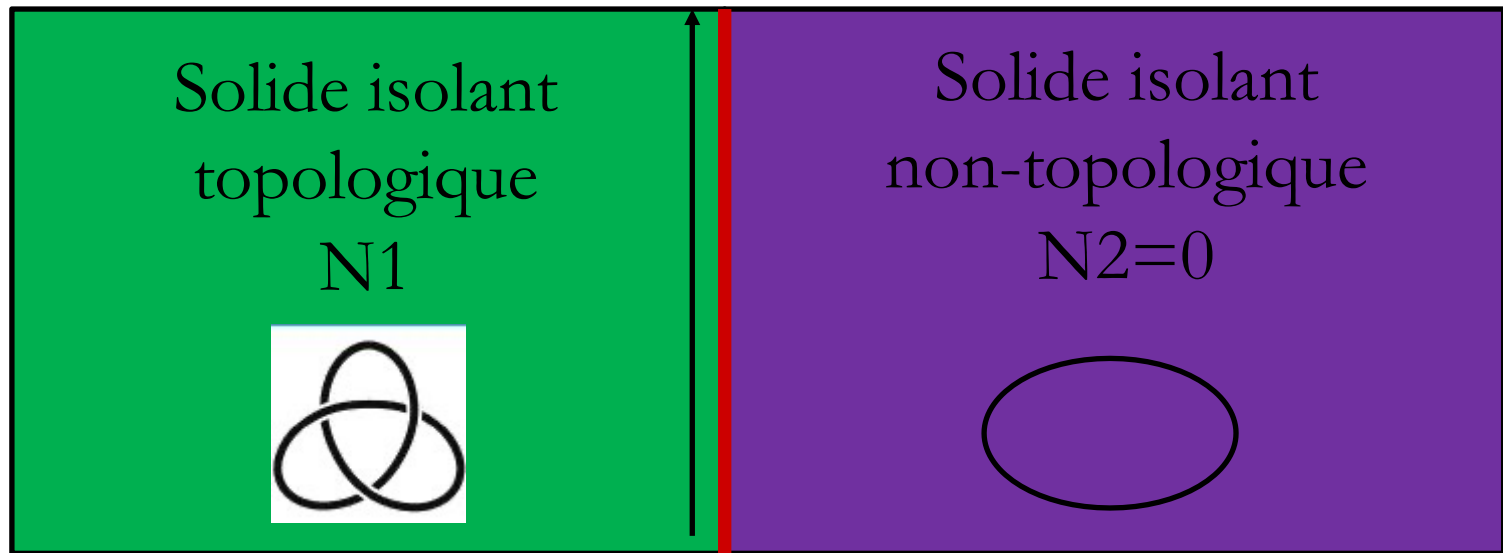
le Klitzing R_K

$$R_K = 25\,812,807... \Omega$$

étalon de résistance

quantification parfaite \rightarrow mesure très précise de $\frac{h}{e^2}$

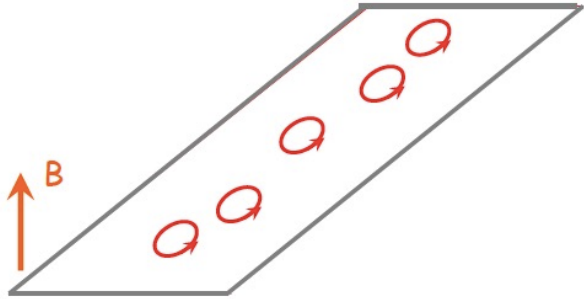
Interfaces entre phases topologiques



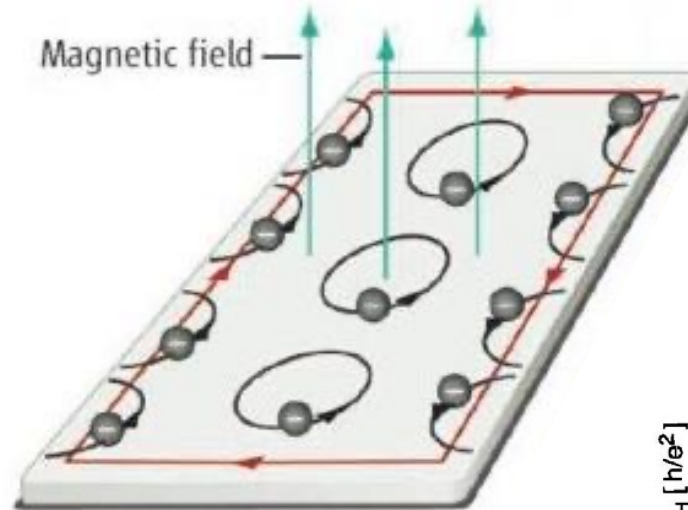
Phases non-compatibles : nécessité d'un tampon entre les deux phases

Canaux de conduction des électrons à l'interface

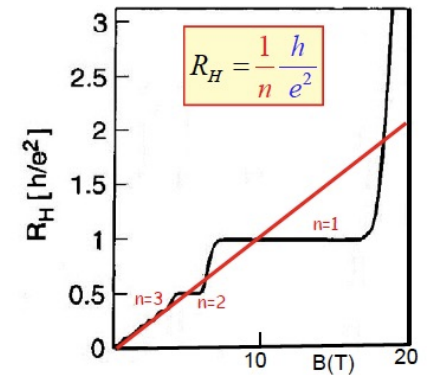
Etats de bord et quantification du transport



Isolant en volume



Mais : états de bord

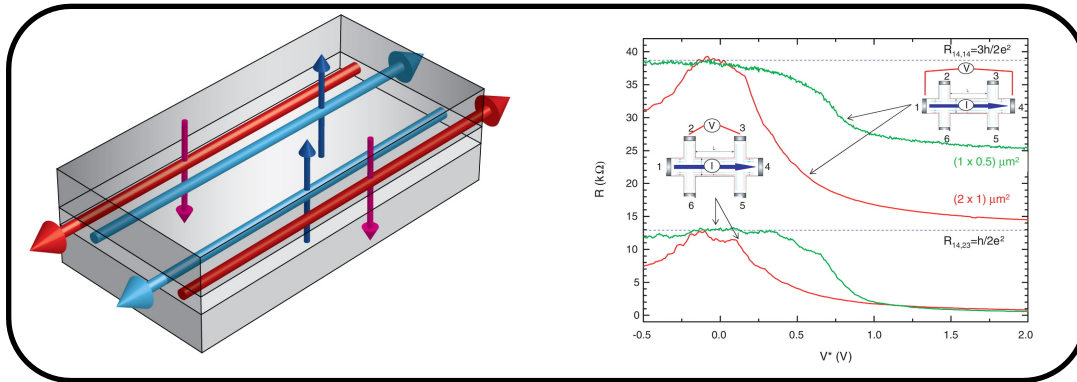


Le **nombre de Chern** $\frac{1}{2\pi} \int_S \mathcal{F} dS = n \in \mathbb{Z}$ fixe le nombre de **canaux électroniques** sur les bords

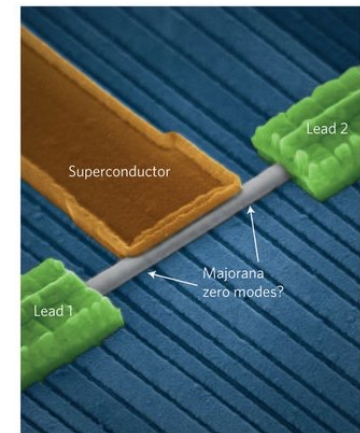
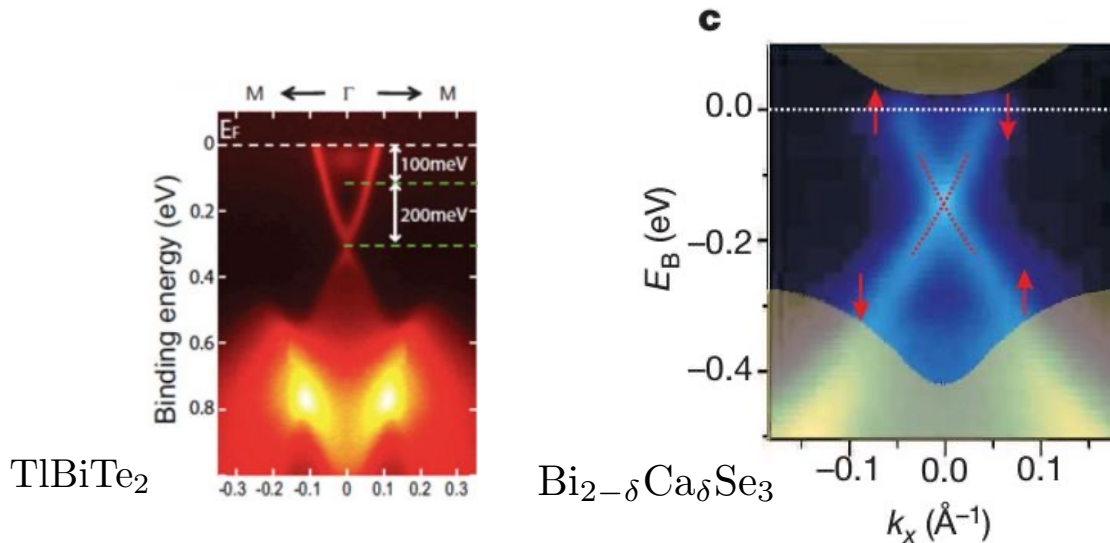
$$\sigma_H = n \frac{e^2}{h} \rightarrow R_H = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2}$$

Isolants et supraconducteurs topologiques

Très nombreux composés récemment mesurés



Fermions de Majorana
Candidat pour le calcul
quantique



Conclusions

La topologie apparait dans de nombreux domaines de la physique, en particulier la notion de **phase géométrique**

Elle correspond à la **phase accumulée** lorsque les paramètres du modèle s'écartent puis reviennent à leurs **valeurs initiales**

Dualité onde-corpuscule : les électrons sont des **ondes** dans les solides. Leur phase géométrique – dite **phase de Berry** – conduit à la définition d'un **invariant topologique** -> définition d'un solide topologique

L'**interface** entre deux solides topologiques fait apparaître **des états de bord** qu'on peut mesurer/caractériser.
